



Українська Федерація Інформатики

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України

**Вищий навчальний заклад Укоопспілки
«ПОЛТАВСЬКИЙ УНІВЕРСИТЕТ ЕКОНОМІКИ І ТОРГІВЛІ»
(ПУЕТ)**

ІНФОРМАТИКА ТА СИСТЕМНІ НАУКИ (ІСН-2015)

**МАТЕРІАЛИ
VI ВСЕУКРАЇНСЬКОЇ НАУКОВО-ПРАКТИЧНОЇ
КОНФЕРЕНЦІЇ ЗА МІЖНАРОДНОЮ УЧАСТЮ**

(м. Полтава, 19–21 березня 2015 року)

За редакцією професора О. О. Ємця

**Полтава
ПУЕТ
2015**

**РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМ НЕЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ ТА
ЗАДАЧ З ПОЧАТКОВИМИ УМОВАМИ ДЛЯ СИСТЕМ
ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ НА
ВИСОКОПРОДУКТИВНИХ КОМП'ЮТЕРАХ ГІБРИДНОЇ
АРХІТЕКТУРИ**

Т. О. Герасимова, м. н. с.,

А. Н. Нестеренко, м. н. с.,

*Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України,
dept150@insyg.kiev.ua*

На сучасному етапі дослідження природних явищ, проектування та розрахунку поведінки об'єктів під впливом дії навколишнього середовища, проектування будівель та механізмів тощо для розрахунків відповідних математичних моделей широко використовується високопродуктивна комп'ютерна техніка, в тому числі з паралельною організацією обчислень. Це дозволяє економити час, матеріали, енергоресурси та витрати людської праці.

Вимоги до високопродуктивної обчислювальної техніки випереджають можливості традиційних паралельних комп'ютерів. В даний час такі комп'ютери можуть налічувати сотні і навіть тисячі процесорів (ядер). Але збільшення числа процесорів у паралельних комп'ютерах часто приводить до значного збільшення комунікаційних витрат і зниження їх ефективності. Одним із основних напрямків підвищення продуктивності комп'ютерів є використання графічних процесорів (GPU). Цей напрямок є особливо ефективним, коли необхідно виконувати великі обсяги однорідних арифметичних операцій. Використання графічних процесорів дало можливість розробити комп'ютери гібридної архітектури, яка об'єднує багатоядерні процесори MIMD-архітектури та графічні прискорювачі SIMD-архітектури.

Розглядається питання організації обчислень при розв'язуванні систем нелінійних рівнянь (СНР) та задач з

початковими умовами для систем звичайних диференціальних рівнянь СЗДР високого порядку на комп'ютерах гібридної архітектури (CPU+GPU).

В роботі розглядаються питання організації обчислень при розв'язуванні СНР та СЗДР високого порядку на багатоядерних обчислювальних системах MIMD-архітектури з розподіленою пам'яттю. Реалізація методів розв'язування задач даних класів на комп'ютерах MIMD-архітектури передбачає наступне: масиви оброблюваних даних, до яких відносяться елементи матриці Якобі та програми обчислення відповідних вектор-функцій, розміщуються в розподіленій пам'яті комп'ютера (distributed memory), тобто в локальній пам'яті кожного ядра; кожний процес одночасно і незалежно реалізує власну програму обчислень; декомпозиція даних по процесам виконується, виходячи із збалансованості всіх процесів, комунікаційні функції і синхронізація роботи процесів здійснюється засобами MPI (message-passing interface) [1].

Програми обчислення вектор-функцій треба розробляти таким чином, щоб автоматизувати розпаралелювання їх обчислення разом з обчисленням матриць Якобі на вибрану кількість процесів (яку при потребі можна змінювати), визначені критерії закінчення ітераційних процесів розв'язування СНУ, що забезпечують отримання розв'язків із заданою точністю, а для диференціальних рівнянь визначено методику обчислення довжини кроку інтегрування, що забезпечує стійкість процесу інтегрування та досягнення точності розв'язку задачі, наведено оцінки похибок розв'язків СНУ та СЗДР в умовах наближених вихідних даних [2].

Загальні підходи до розв'язування СНУ та СЗДР. Розв'язування СНУ разом з інтегруванням задач з початковими умовами для СЗДР є задачами, що часто зустрічаються в обчислювальній практиці. Основні алгоритми розв'язування СНУ базуються на методі Ньютона. Відмінність між так званими квазіньютонівськими методами в основному полягає тільки в способі обчислення наближеного значення матриці Якобі системи: це можуть бути як різницеві формули, так і рекурентні формули обчислення наближеної матриці Якобі або оберненої до неї на послідовності ітерацій. Проте всі

квазіньютонівські методи забезпечують надлінійну швидкість збіжності ітераційних процесів поблизу розв'язку за умови, що початкове наближення лежить в області тяжіння розв'язку. Що ж стосується систем диференціальних рівнянь з початковими умовами, то при інтегруванні задач явними методами виникає проблема забезпечення стійкості процесу чисельного інтегрування та забезпечення точності розв'язку, в той час як при використанні неявних методів довжина кроку інтегрування впливає тільки на досягнення точності розв'язування задачі, але при цьому знову таки використовується матриця Якобі системи рівнянь. Часто також при розв'язуванні задач для СЗДР, що описують рух керованих об'єктів, виникає необхідність розв'язувати системи не тільки в реальному масштабі часу, а навіть швидше, ніж відбувається процес в реальному часі; більше того, для оптимізації деяких процесів потрібно проводити багатоваріантні розрахунки для вибору оптимального. Матриця Якобі має n^2 елементів і на обчислення кожного елемента матриці потрібно витратити деяку кількість операцій, часто значну. В результаті на обчислення тільки матриці Якобі потрібна велика кількість операцій і, відповідно, значний час виконання обчислень при досить великих порядках систем. Цей час можна суттєво скоротити, якщо виконання всіх арифметичних операцій при обчисленні елементів матриці Якобі і при розв'язуванні систем лінійних алгебраїчних рівнянь в методах типу Ньютона або методах інтегрування СЗДР розпаралелити на вибрану кількість процесів, що реалізуються на багатоядерних комп'ютерах MIMD-архітектури [3].

Далі в таблицях 1 і 2 наведено результати, отримані при застосуванні гібридних алгоритмів методів Ньютона та Рунге-Кутта 4-го порядку, відповідно, які використовують обчислювальні можливості CPU та GPU.

Таблиця 1. Часи розв'язування СНР порядку $n=4000$

	np=1	np=2	np=4	np=8
CPU+GPU	519,01	265,76	145,54	86,68
MPI	829,87	506,465	361,46	290,28
GPU	363,00			

Таблиця 2. Часи розв'язування СЗДР

	np=1	np=2	np=4	np=8
CPU+GPU	76,56	9,79	4,91	3,4
MPI	78,91	40,73	24,48	15,59
GPU	5,6		3	3

Висновки. Дослідження паралельних алгоритмів розв'язування СЗДР показали, що багатоядерні комп'ютери з графічними процесорами дають можливість суттєво прискорити час розв'язування задач.

Запропоновано алгоритми, які забезпечують високу ефективність розпаралелювання на GPU, оптимізують використання пам'яті CPU. Показано ефективність гібридних алгоритмів методу Ньютона та Рунге-Кутта 4-го порядку розв'язування СНР та задач з початковими умовами для СЗДР.

Література

1. Химич А.Н. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики. / Химич А.Н., Молчанов И.Н., Попов А.В., Чистякова Т.В., Яковлев М.Ф. – Киев: Наукова думка, 2008. – 248 с.
2. http://developer.download.nvidia.com/compute/cuda/1_0/CUBLAS_Library.
3. Яковлев М.Ф. Особливості розв'язування систем нелінійних та диференціальних рівнянь на паралельних комп'ютерах / Яковлев М.Ф., Герасимова Т.О., Нестеренко А.Н. // Питання оптимізації обчислень (ПОО – XXXV). Праці міжнародного симпозіуму. – Київ: Інститут кібернетики ім. В.М. Глушкова НАН України, 2009. – Т.2.– С. 435-439.